



**Universidad**  
Zaragoza



**Facultad de Ciencias**  
**Universidad** Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

# Regulación por control óptimo en sistemas fluidos basados en leyes de conservación

**Jorge Ferrer Beired**

Directora: Pilar García Navarro

Departamento de Ciencia y Tecnología de Mecánica de Fluidos Universidad Zaragoza

Curso 2018/2019

Noviembre 2019



## Agradecimientos

*A mi familia por acompañarme y apoyarme a lo largo de estos años a pesar de todos los altibajos.*

*A Sara por estar ahí todo este tiempo y prestarme su ayuda en tantas formas distintas, y a María por su optimismo (casi) contagioso, esas conversaciones nocturnas y su inestimable ayuda en la realización de las imágenes.*

*A Pilar, mi tutora, por su paciencia e implicación en este proyecto.*





# Índice

<b>Índice</b>	<b>0</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción y motivaciones . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.3. Estructura de la memoria . . . . .	4
<b>2. Introducción a la formulación adjunta</b>	<b>5</b>
2.1. Sensibilidades . . . . .	5
2.2. Ecuación de transporte escalar . . . . .	5
<b>3. Control y optimización</b>	<b>8</b>
3.1. Tipos de control . . . . .	8
3.2. Método del gradiente descendente . . . . .	9
3.3. Puesta a prueba del método con la ecuación de transporte . . . . .	10
<b>4. Formulación de ecuaciones de aguas poco Profundas</b>	<b>13</b>
4.1. Derivación a partir de las leyes de conservación . . . . .	13
4.2. Formulación característica de las ecuaciones Shallow Water Linealizadas . . . . .	14
4.3. Formulación característica de las ecuaciones Shallow Water . . . . .	15
4.4. Tipos de flujo y condiciones de contorno . . . . .	16
4.5. Ecuaciones adjuntas del sistema linealizado . . . . .	17
4.6. Sensibilidades de las ecuaciones Shallow Water . . . . .	19
<b>5. Resolución numérica de las ecuaciones</b>	<b>20</b>
5.1. Esquema numérico: Método de Godunov . . . . .	20
5.2. Comparación con caso analítico del sistema linealizado . . . . .	21
5.3. Resultados de la optimización de Shallow Waters . . . . .	22
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>25</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	25
6.2. Trabajo futuro . . . . .	25
<b>Bibliografía</b>	<b>26</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>A1</b>
A. Algoritmo del método del gradiente descendente . . . . .	A1
B. Linealización de las ecuaciones . . . . .	A2
C. Derivación de las ecuaciones adjuntas Shallow Water . . . . .	A3



# 1. Introducción

## 1.1. Introducción y motivaciones

Conforme la civilización avanza, la complejidad de sus infraestructuras aumenta, y es indudable que la gestión de los recursos hídricos es parte fundamental de este progreso. Desde saltos de agua que producen electricidad hasta la canalización de ríos para llevar agua a regiones que serían incultivables de otro modo o permitir su navegación pasando el control de las avenidas de inundación de estos para evitar daños a la infraestructura civil. Son muy diversas, pues, las formas en las que se presenta en nuestra sociedad la importancia de diseñar infraestructuras adecuadas que satisfagan necesidades muy diversas. Todos estos fenómenos pueden ser modelizados matemáticamente mediante modelos hidrodinámicos que describen el comportamiento del sistema fluido a través de unas ecuaciones que relacionen las magnitudes físicas que gobiernan el fenómeno. [6]

En este trabajo se estudiarán flujos de superficie (en concreto un tipo particular de estos), esto es, que presentan uno o más contornos en los que la tensión de corte paralela es nula. Son los que tienen lugar en mares, ríos, lagos, canales, etc.

Los flujos de superficie pueden ser estacionarios en caso de permanecer constantes en el tiempo o transitorios si existe una evolución temporal. Con respecto a la variación espacial pueden ser uniformes cuando la profundidad del agua es la misma en cualquier punto o no uniforme cuando la profundidad es variable.

Es también interesante estudiar los fenómenos ondulatorio que se producen en la superficie libre.

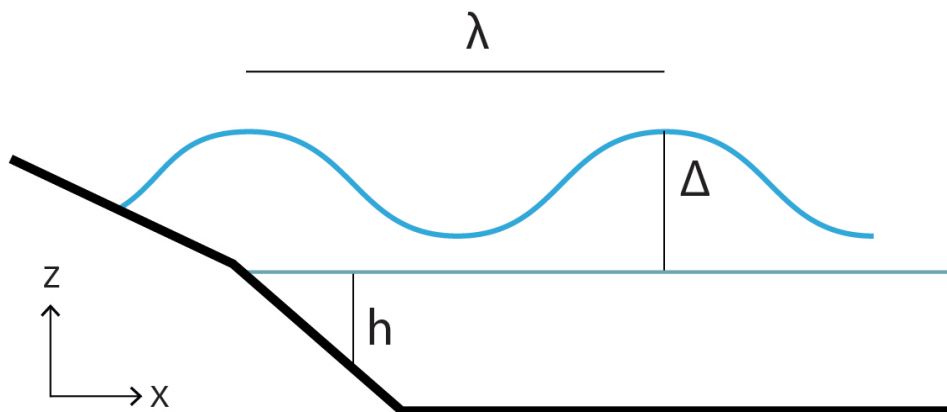


Figura 1: Escalas de una onda en superficie

Según el esquema de la figura 1  $h$  es la altura del agua sin perturbar,  $\Delta$  la amplitud de la onda que se propaga y  $\lambda$  su longitud de onda. Las perturbaciones pueden clasificarse en:

- Influenciadas por la tensión superficial. Cuando la longitud de onda es suficientemente pequeña ( $\lambda < 1,73\text{cm}$ . en la interfase aire-agua). Son producidas por el viento y denominadas *ripples*.
- No influenciadas por la tensión superficial. Su comportamiento está regido por la fuerza de gravedad y a su vez pueden clasificarse en:
  - Ondas en aguas profundas. Se dan cuando la profundidad  $h$  es mayor que un 28 % de la longitud de onda  $\lambda$ . Si la amplitud  $\Delta$  es pequeña, la velocidad de propagación es de  $c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. Un ejemplo de estas ondas son las olas producidas por el viento en los océanos.

- Ondas en aguas poco profundas (Shallow Waters). Se dan cuando la profundidad  $h$  es menor que un 7 % de la longitud de onda  $\lambda$ . Cuando la amplitud  $\Delta$  es pequeña, la velocidad de propagación es de  $c = \sqrt{gh}$  siendo independiente de la longitud de onda y aumentando con la profundidad. Este rango abarca fenómenos como las mareas, la rotura de las olas en la orilla, los tsunamis (que pueden llegar a tener longitudes de ondas de kilómetros) y, por supuesto las producidas en ríos y canales.

Estos dos últimos modelos son versiones simplificadas de un caso más general. En el caso intermedio, las aproximaciones realizadas para obtenerlos dejan de ser válidas y ninguno de los dos modelos es útil, siendo necesario recurrir a las ecuaciones completas. Un breve esquema sobre esta clasificación puede verse en la figura 2. En este trabajo se modelizarán las ecuaciones de aguas poco profundas.

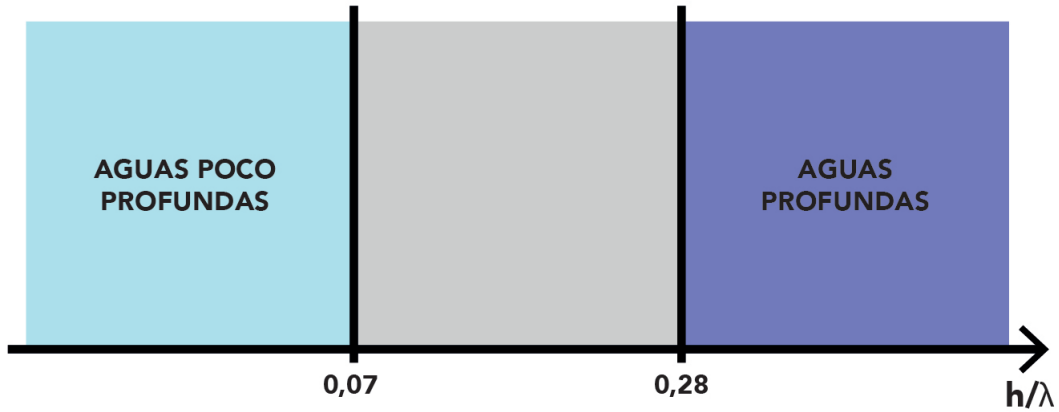


Figura 2: Esquema de tipos de modelos para flujos no influidos por la tensión superficial.

Las leyes físicas que describen el movimiento de cualquier fluido son las leyes de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, también conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes. En situaciones con temperatura ambiente, la densidad del agua es prácticamente constante ante la presión, por lo que puede tratarse como un flujo incompresible. Bajo esta aproximación, la ecuación de la energía es independiente de las otras dos, por lo que el sistema quedará descrito por las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento.

Las ecuaciones de aguas poco profundas son un sistema de ecuaciones diferenciables en derivadas parciales hiperbólico y no lineal que viene regido por las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. En la realidad, la velocidad del agua en un río varía a lo largo y ancho de su superficie y depende también de la profundidad. Las ecuaciones en cuestión se tratan de una aproximación bidimensional que desprecia la variación con la profundidad, siendo sus variables el valor medio integrado desde el fondo a la superficie.

Existen también situaciones en las que es posible prescindir, además, de la de la componente transversal del flujo, reduciéndose a una única en la dirección de propagación. Esto es posible en casos en los que la naturaleza del flujo sea de por sí cuasi-unidimensional. Si no existe una geometría irregular en el cauce (variaciones de la forma del canal o ríos con curvaturas importantes) ni una pérdida del sentido de avance unidimensional, como ocurre en las llanuras de inundación[5][7][5], los modelos 1D pueden ofrecer una simplificación con resultados satisfactorios.

Para un volumen de control de un cauce unidimensional comprendido entre  $x_1$  y  $x_2$  y los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , la formulación integral conservativa es:

$$\int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{U}(x, t)]_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{F}(\mathbf{U})(x, t)]_{x_1}^{x_2} dt - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{H}(x, t) dx dt = 0 \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{U}$  es la magnitud denominada conservada,  $\mathbf{F}$  es el flujo de la magnitud conservada y  $\mathbf{H}$  el término fuente o sumidero de  $\mathbf{U}$ .

Esto en forma diferencial equivale a:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{H} = 0 \quad (1.2)$$

Las ecuaciones resultantes, como en la mayoría de casos en física, solo poseen soluciones analíticas en los casos de simetría muy sencilla y es necesario recurrir a métodos numéricos para resolverlas. Esto requiere, pues, prescindir de la naturaleza continua de los fenómenos reales y discretizar el sistema. El dominio espacial continuo es sustituido por un número finito  $N$  de puntos (nodos) formando una malla. Del mismo modo, el problema se dividirá en  $N_T$  nodos temporales discretos.

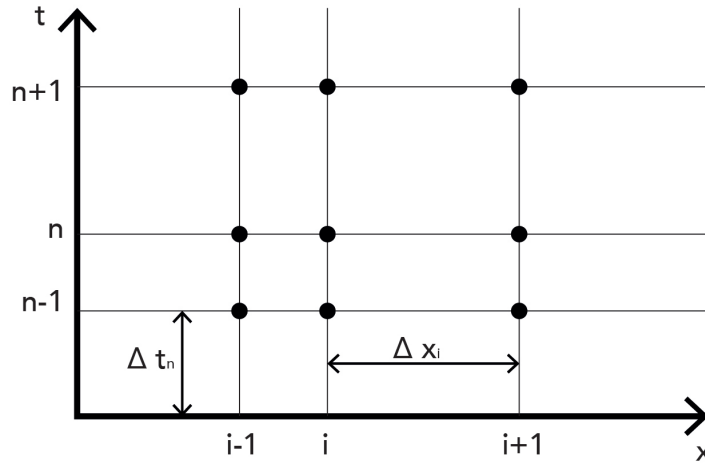


Figura 3: Red computacional en el plano  $(x, t)$

La red computacional de la figura 3 consiste en un conjunto finito de nodos  $NN_t$ . El mallado puede ser uniforme o no. En algunos casos puede ser útil utilizar una discretización espacial variable en la que el intervalo espacial  $\Delta x$  no sea constante, como por ejemplo cuando existen regiones con un interés especial (como una curva) que necesiten más resolución. Algo similar sucede con el intervalo temporal  $\Delta t$  que pueden ir variándose para cumplir ciertos criterios de estabilidad numérica.[3] Para la resolución de las ecuaciones se requiere determinar externamente la condición inicial en todo el dominio espacial y un número suficiente de condiciones de contorno.

Finalmente, queda por discutir el último gran frente que afronta este trabajo, que es el control de dichas ecuaciones. Ello significa especificar la forma que debe tener una cierta función que introduce información al problema. Un ejemplo podría ser, por ejemplo la distribución espacial de los valores iniciales de una de las variables del problema, la evolución temporal de una condición de contorno o algún término fuente.

Esto significa dar respuesta a una pregunta similar a esta: ¿de qué forma se ha variar la apertura de una compuerta en algún punto del recorrido de un canal para que exista un caudal constante en otro punto y que además no se desborde ni se quede sin agua en algún lugar específico?

Por ejemplo, los agricultores esperan un suministro de agua preciso en el tiempo fijado y para ello es necesario gestionar todas las múltiples ramificaciones que un sistema de abastecimiento puede tener para que, por un lado, ninguna de ellas proporcione un caudal inferior al esperado y, por otro, no haya exceso en otras de modo que se desperdicie el agua. Además, la mayoría de estas infraestructuras son multipropósito, por lo que se ha de satisfacer a la vez las necesidades de consumidores domésticos, agrícolas y de transporte (tanto físico de mercancías como de vertido

de desechos). Es crítico, pues, desarrollar algún método que permita encontrar la condición de operación óptima que satisfaga las necesidades de cada una de dichas demandas.

Otra aplicación puede ser en caso de riesgo de desbordamiento. Bajo este supuesto sería posible escoger qué compuertas habría que abrir o cerrar para proteger una población e inundando en su lugar tierras de cultivo cercanas.

Una última posibilidad muy útil consiste en reconstruir cuál ha sido la situación aguas arriba que ha dado lugar a un cierto flujo en una estación de medida aguas abajo. Esto puede permitir controlar el vertido de contaminantes industriales a un río con una o varias estaciones de medición aguas abajo, sin la necesidad de colocar sensores en cada uno de los posibles centros de contaminación.

Existen, por supuesto, varias formas de lograr esto. Aquí se presentará el método adjunto, en el que se derivan unas ecuaciones adjuntas a las del problema físico. Estas nuevas ecuaciones arrojan información sobre la sensibilidad del sistema ante perturbaciones, permitiendo escoger así cuál es la más óptima según el objetivo concreto.

La formulación adjunta tiene una flexibilidad muy grande, y su uso no se restringe a mecánica de fluidos. Se encuentran aplicaciones en meteorología[1][2] o diseño de piezas en ingeniería[4].

## **1.2. Objetivos**

El presente trabajo pretende ser una introducción accesible a la teoría del método adjunto y de la resolución numérica de flujos. Para ello se introducen los conceptos aplicándolos a ejemplos de dificultad creciente hasta llegar finalmente a la resolución y control de las ecuaciones de aguas poco profundas.

Se ha desarrollado de cero un programa que resuelva tanto el problema directo como el adjunto. Por tanto, será no solo necesario comprobar que el problema adjunto proporciona, en efecto, la información esperada, sino que también se simula bien el problema directo. Para ello se utilizará el sistema linealizado (válido cuando la amplitud de las ondas es pequeña) que sí posee solución analítica bajo ciertas condiciones.

El método adjunto se utilizará para tratar de reconstruir una cierta condición de contorno previamente fijada. Si se consigue esto satisfactoriamente, es esperable que el programa también sea eficaz cuando se introduzcan otro tipo de restricciones como las comentadas anteriormente.

## **1.3. Estructura de la memoria**

La memoria se ha estructurado en cinco secciones y varios anexos. La primera sección es la propia introducción. En la segunda, se presenta la formulación adjunta aplicada al caso de una ecuación muy sencilla, de forma que los cálculos resulten no resulten demasiado oscuros. En el siguiente se explica cómo puede resolverse el problema optimización para minimizar una cierta función y cómo esto es usado conjuntamente con la información obtenida de las ecuaciones adjuntas para conseguir el control de un flujo.

Los dos siguientes forman el último bloque del trabajo, en el que se exponen las ecuaciones de aguas poco profundas y la obtención de sus ecuaciones adjuntas en la sección cuarta y en la quinta y última se presenta el método numérico utilizado para resolverlas junto a los resultados obtenidos.

## 2. Introducción a la formulación adjunta

### 2.1. Sensibilidades

Las sensibilidades son la información necesaria para el control de sistemas fluidos. Estas informan de cómo una función objetivo (normalmente una función integral de las variables del flujo) se ve modificada respecto a una variación de las condiciones de dicho flujo, por ejemplo: una alteración en las condiciones iniciales. Con las sensibilidades debidamente identificadas, se pueden usar algoritmos de optimización que minimicen la función objetivo. Por lo tanto, el control del sistema requiere del conocimiento de las sensibilidades. El cálculo de las sensibilidades puede ser muy complicado. En general las condiciones de flujo en un punto del espacio y tiempo determinado tendrán un efecto distinto en la función objetivo que en otro punto cualquiera dado. Al resolver problemas numéricamente el sistema queda discretizado en  $N$  nodos espaciales y  $N_T$  temporales. Así, existirán en total  $NN_T$  sensibilidades.

La forma más elemental de evaluar las sensibilidades es mediante el Método de Sensibilidad Directo[11]. Usando este método, se perturba una de las  $NN_T$  coordenadas espacio-temporales y se resuelve el problema para obtener cuál es el efecto de esta perturbación en la función objetivo. Este proceso se repite  $NN_T$  veces, una por cada una de las componentes del dominio, hasta que todas las sensibilidades resultan identificadas.

Esto es altamente ineficiente, pues las ecuaciones que representan problemas reales son complejas y su resolución requiere de bastante tiempo de computación, por lo que repetir esto un número arbitrariamente alto de veces resulta prohibitivo. En muchas aplicaciones (como para control de abastecimiento de aguas de regadío) es necesario controlar el flujo en directo, por lo que la importancia de un método más eficiente es, si cabe, todavía más crítica. Es por ello que es necesario encontrar un método alternativo para el cálculo de las sensibilidades. Una posible alternativa es el Método de Sensibilidad Adjunto (ASM)[11][8][12] que consiste en derivar unas ecuaciones adjuntas a las gobernantes a partir de las cuales es posible obtener fácilmente las sensibilidades.

### 2.2. Ecuación de transporte escalar

Como presentación del método se derivará la ecuación adjunta de la ecuación de transporte escalar.

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} - s(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $c$  define la variable del flujo (concentración de un soluto, por ejemplo),  $u$  la velocidad (constante) y  $s$  un término fuente. Tiene forma conservativa como (1.2) donde el flujo es  $f = uc$ :

La función objetivo  $J$  se define el problema específico que se quiera tratar según la función  $r(x, t)$ . No es necesario establecer su expresión concreta ahora, los resultados en esta sección quedarán expresados en función de esta.

$$J = \int_0^T \int_0^L r(x, t) dx dt \quad (2.2)$$

Para obtener la ecuación adjunta el procedimiento es el siguiente: se integra en tiempo y espacio y se multiplica la ecuación (2.1) por una función continua y diferenciable  $\sigma$ . En ocasiones, a esta variable adjunta  $\sigma$  se la denomina multiplicador de Lagrange.

$$K = \int_0^T \int_0^L \sigma \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - s(x, t) \right) dx dt = 0 \quad (2.3)$$

Puede ser integrada por partes para que las derivadas parciales queden acompañando a la variable adjunta.

$$K = \int_0^L [\sigma c]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L c \frac{\partial \sigma}{\partial t} dx dt + \int_0^T [u \sigma c]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L u c \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^L \sigma s dx dt \quad (2.4)$$

Agrupando:

$$K = \int_0^L [\sigma c]_0^T dx + \int_0^T [u \sigma c]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L \left[ c \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma s \right] dx dt = 0 \quad (2.5)$$

Ahora, tomando primeras diferencias respecto a  $c$  y el valor de la fuente  $s$ , la ecuación (2.5) esta queda:

$$\delta K = \int_0^L [\sigma \delta c]_0^T dx + \int_0^T [u \sigma \delta c]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L \left[ \delta c \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma \delta s \right] dx dt = 0 \quad (2.6)$$

Y haciendo lo mismo, la variación de la función objetivo (2.2):

$$\delta J = \int_0^T \int_0^L \frac{\partial r}{\partial c} \delta c dx dt \quad (2.7)$$

Sumando las dos expresiones anteriores se obtiene de forma similar al apartado anterior, una forma alternativa de  $\delta J$

$$\delta J + \delta K = \underbrace{\int_0^L [\sigma \delta c]_0^T dx}_A + \underbrace{\int_0^T [u \sigma \delta c]_0^L dt}_B - \underbrace{\int_0^T \int_0^L \delta c \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial c} \right) dx dt}_C - \int_0^T \int_0^L \sigma \delta s dx dt \quad (2.8)$$

Ahora, para calcular la sensibilidad respecto a una perturbación es conveniente escoger condiciones que eliminen todos los términos en los que no participe el factor a perturbar. En el caso de querer computar la sensibilidad de la fuente  $\delta s(x, t)$ , las integrales de contorno deben ser eliminadas. Para anular la integral espacial  $A$  se pueden escoger las condiciones:

$$\sigma(x, T) = \delta c(x, 0) = 0 \quad (2.9)$$

La integral  $B$  representa las condiciones de contorno y puede anularse mediante la restricción:

$$\delta c(0, t) = \delta c(L, t) = 0 \quad (2.10)$$

La primera imposición (2.9)  $\sigma(x, T) = 0$  establece la condición inicial de la ecuación adjunta en la que la variable adjunta  $\sigma$  es nula en todo el espacio. Esta elección puede parecer arbitraria, y de hecho surge como necesidad de eliminar los términos no deseados de (2.8), pero tiene la importante implicación de que la ecuación adjunta deberá ser resuelta hacia atrás en el tiempo.



Las demás implican que no se van a inducir perturbaciones en la variable del flujo en las condiciones iniciales -segunda de (2.9)- ni en los contornos (2.10). El significado de perturbación debe tomarse como una cierta perturbación sobre la función en sí (que rige, por ejemplo la evolución temporal de la condición de contorno aguas arriba o la distribución espacial de la condición inicial). Esto no significa que la magnitud controlada por la función tome un valor constante, sino que su descripción permanece fijada.

También conviene eliminar la integral  $C$  que corresponde a la ecuación adjunta, que no es más que la siguiente imposición para anular la integral:

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial t} - u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial c} = 0 \quad (2.11)$$

Finalmente, tras eliminar todos los términos no relevantes, (2.8) se reduce a:

$$\delta J = - \int_0^T \int_0^L \sigma \delta s \, dx \, dt \quad (2.12)$$

Por tanto, la sensibilidad en el tiempo  $t = t_i$  de la función objetivo respecto a una perturbación en la fuente será:

$$\left( \frac{\delta J}{\delta s} \right)_i = -\sigma(x, t_i) \quad (2.13)$$

Para llegar hasta aquí ha sido necesario hacer tres restricciones en (2.9), (2.10) y (2.11). El motivo de su elección es para obtener una forma de  $J$  que sea sencilla y de información útil sobre la sensibilidad de esta frente a una perturbación en la función fuente.

Se revela, ahora, la gran ventaja que otorga este método para el cálculo de las sensibilidades. Una vez resuelta la ecuación adjunta se dispone de toda la información  $\sigma(x, t)$  y esto se traduce en el inmediato conocimiento de todas las sensibilidades en cada tiempo. En general, las expresiones de las sensibilidades pueden ser más complicadas que (2.13), pero siempre dependen de alguna combinación de las variables directas y las adjuntas del problema, por lo que la resolución de el problema directo primero (cuya información, además, es necesaria para resolver la ecuación adjunta debido al término  $r$ ) y luego el adjunto, arrojará los valores de todas las sensibilidades.

Si lo que se hubiese querido obtener fuese la sensibilidad respecto a la condición de contorno aguas arriba, ya no sería necesario imponer  $\delta c(0, t) = 0$  en (2.8) ya que  $\delta c(0, t)$  es, precisamente, la magnitud buscada y, en su lugar, se eliminaría  $\delta s = 0$  para llegar a:

$$\delta J = - \int_0^T u \sigma(0, t) \delta c(0, t) \, dt \Rightarrow \left( \frac{\delta J}{\delta c(0, t)} \right)_i = -u \sigma(0, t_i) \quad (2.14)$$

### 3. Control y optimización

#### 3.1. Tipos de control

La optimización de un problema puede entenderse como el proceso iterativo de minimización de un cierto funcional que evalúa el objetivo del problema. La forma más general que puede tomar  $J$  es:

$$J = \int_0^T \int_0^L r(x, t) dx dt \quad (3.1)$$

No obstante, no se ha discutido todavía sobre la forma que puede tomar esta función  $r$  según el propósito que se fije como objetivo. El uso de la media cuadrática es un funcional adecuado en la mayoría de los casos. Con estos criterios en mente, una posible forma de la función objetivo es:

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [U(x, t)\delta(x_T) - U_{\text{obj}}(x, t)\delta(x_T)]^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [U(x_T, t) - U_{\text{obj}}(x_T, t)]^2 dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $U(x, t)$  es el vector de variables del problema,  $U_{\text{obj}}$  el de las variables fijadas como objetivo a alcanzar,  $\delta(x_T)$  la delta de Dirac evaluada en el punto  $x_T$ , que es el punto de medida.

Aunque es común que solo se use una de las variables como objetivo, nada impide, en principio, utilizar ambas. Del mismo modo, es concebible prescindir de la delta de Dirac  $\delta(x_T)$  y obtener  $J$  como función del espacio. Para propósitos generales es suficiente con utilizar un único punto  $x_T$  como referencia. En caso de plantear un caso más complicado habría que prestar atención a la convergencia, pues es posible que no se pudiesen satisfacer todas las condiciones impuestas a la vez.

La ecuación (3.2) implica especificar la evolución temporal que debe seguir una (o más) variable(s) en un punto  $x_T$ . El objetivo de la optimización es minimizar la función  $J$  o, en otras palabras, hacer que la simulación del problema reproduzca que, efectivamente, las variables toman los valores fijados como objetivo en el punto en cuestión.

La expresión (3.2) aplicado a controlar únicamente el calado  $h$  en un punto  $x_T$  tal y como se usará en este trabajo es:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{2} [h(x_T, t) - h_{\text{obj}}(x_T)]^2 dt \quad (3.3)$$

Otra forma que puede ser muy interesante[11] es, por ejemplo:

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [h(x_T, t) - h_{\text{obj}}(x_T)]^2 \delta(x_T) & \text{si } h(x_T) > h_{\text{obj}}(x_T) \\ 0 & \text{si } h(x_T, t) \leq h_{\text{obj}}(x_T) \end{cases} \quad (3.4)$$

Esta función fija un valor  $h_{\text{obj}}$  constante máximo que el calado  $h(x, t)$  puede alcanzar. Solamente cuando lo sobrepasa  $r$  contribuye a aumentar el valor de  $J$ . Cuando el calado no sobrepase en ningún momento el valor especificado  $J = 0$  y, obviamente, mínima. De este modo, se consigue que el flujo no sobrepase la altura máxima de un canal o una barrera de protección y se evita que desborde.

Los métodos de optimización son iterativos. En cada nuevo paso del algoritmo se varía algún parámetro de control del problema, que altera el flujo, variando así el valor de  $J$  respecto al que tenía antes de la variación. Este trabajo se centra, principalmente, en el control del flujo a través de las condiciones de contorno pero con una función objetivo y un desarrollo adecuado de las ecuaciones adjuntas puede optimizarse cualquier parámetro controlable que pueda existir.

Para ello se lanza una simulación con la condición de contorno deseada, y se almacenan la evolución temporal de los valores de  $h_{\text{obj}}((x_T, t))$  que serán usados como referencia en el resto del proceso para calcular (3.3). A continuación se fija una condición de contorno arbitraria que, evidentemente, hará evolucionar el problema de forma distinta y no se anulará la función objetivo  $J$  ya que  $h(x_T, t) \neq h_{\text{obj}}(x_t, t)$ . El algoritmo de optimización irá variando la condición de contorno escogida en cada iteración para, previsiblemente, converger finalmente a una solución en la que  $h(x_T, t) = h_{\text{obj}}(x_t, t) \Rightarrow J = 0$  y la condición de contorno sea la especificada inicialmente como objetivo. Un esquema del proceso seguido se puede observar en la figura 5

### 3.2. Método del gradiente descendente

Este algoritmo fue propuesto por Cauchy en 1847 y, aún tratándose de uno de los métodos más sencillos disponibles, da unos resultados satisfactorios para las funciones sencillas que se tratan en este trabajo.

Los pasos concretos del algoritmo, así como una justificación teórica puede encontrarse en A. Aquí se representa gráficamente el método para funciones en una y dos dimensiones puede verse en la figura 4. Resumidamente consiste en utilizar la información sobre la dirección de máximo decrecimiento que proporciona el gradiente en un punto e ir haciendo pasos de longitud  $\epsilon$  en esa dirección hasta que finalmente se satisfagan unas ciertas condiciones de convergencia.

Podría parecer que este método es el mejor imaginable. No obstante, el hecho de que el gradiente solo contenga información local hace que sea inapropiado para la mayoría de problemas, ya que es posible que se quede «atrapado» en un mínimo local.

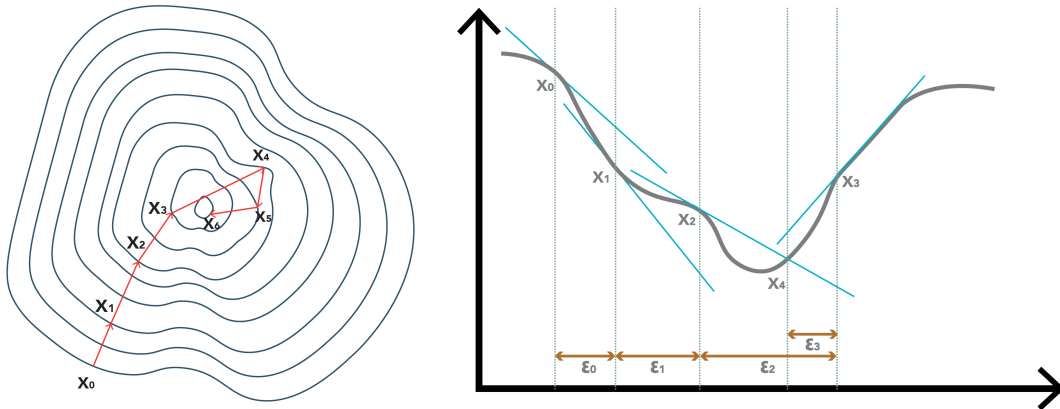


Figura 4: Convergencia del algoritmo hacia el mínimo visto en una función 2D (izquierda) donde el gradiente es perpendicular a las líneas de contorno y en una 1D (derecha) donde el gradiente es la derivada de la función.

Para estas situaciones complejas existen un número de métodos muy diversos. Basados también en el gradiente pero más sofisticados son, por ejemplo, el método del gradiente conjugado o el de Newton, pero existen también algoritmos de búsqueda directa o mediante métodos estocásticos.[10][8]

Al ser la función objetivo (3.3) unidimensional (la única variable es el tiempo), la sensibilidad respecto a una perturbación  $\delta p$

$$S_i = \frac{\delta J}{\delta p} = \nabla J \quad (3.5)$$

indica la pendiente de  $J$  respecto a  $p$ . Así pues, este es el papel que juegan las ecuaciones adjuntas: determinar la sensibilidad que indica cuánto una variación de  $p$  modifica  $J$ . Esta es la información que utiliza el algoritmo del gradiente descendente para minimizar la función objetivo.

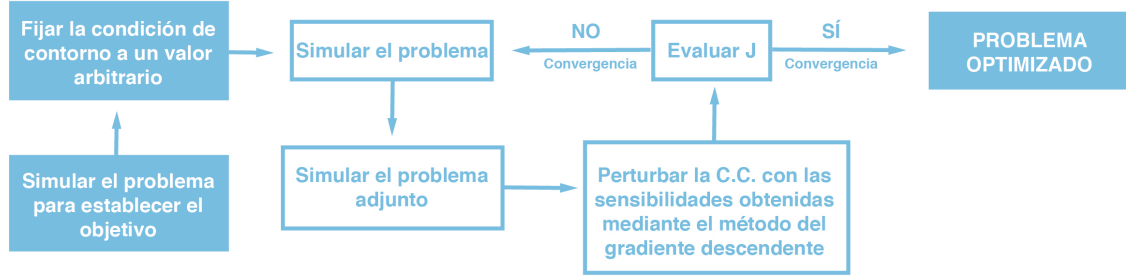


Figura 5: Esquema general del proceso de optimización de la condición de contorno basado en el método adjunto

Quedan ahora dos asuntos que aclarar sobre el algoritmo. En primer lugar cómo se determina el paso óptimo de avance  $\varepsilon$  y por otro lado cuál de los criterios de convergencia propuestos en A para decidir cuándo se detiene el proceso. En este trabajo se utilizará la condición (A.5) que, expresada según la función objetivo es:

$$\left| \frac{J^{k+1}(x, t) - J^k(x, t)}{J^k(x, t)} \right| \leq \xi \quad (3.6)$$

donde  $k$  es el número de iteración y  $\xi$  un número elegido por el usuario suficientemente pequeño.

En la práctica resulta útil añadir, además una condición adicional que es:

$$k = k_{\text{máx}} \quad (3.7)$$

Si se da esta última condición, la función no habrá convergido al mínimo deseado, pero es una vía de escape en caso de que el proceso acabe atrapado en un bucle infinito. Fijando un valor de  $i_{\text{máx}}$  conservadoramente grande pero finito se evita que en casos de geometría complicada nunca se logre la convergencia o, especialmente relevante en el trabajo realizado aquí, en la etapa de diseño cuando existen errores en la programación de la obtención de las sensibilidades el programa finalizará automáticamente en lugar de tener que hacerlo manualmente el usuario.

Respecto a la determinación del paso óptimo de avance  $\varepsilon$  puede ser un problema mucho más complicado que el propio problema de minimización. Afortunadamente, en muchas ocasiones no es necesario escoger el mejor valor de  $\varepsilon$  si no, simplemente algo suficientemente razonable.

La opción más inmediata es fijar un valor pequeño de  $\varepsilon$  y mantenerlo fijo durante todo el problema. Esto resulta ineficiente, pues cuando se esté lejos del mínimo y los pasos pueden ser más grandes se irá muy despacio, y cuando se esté cerca de la solución los pasos podrían ser demasiado grandes para converger.

Una alternativa no muy complicada es variar levemente  $\varepsilon$  en función de si la función ha convergido o divergido en la iteración anterior:

En este trabajo se ha utilizará la variación del paso  $\varepsilon$  representada en la figura 6. Cuando el algoritmo converge, se aumenta la longitud del paso para la siguiente iteración, mientras que se reduce si ha divergido.

### 3.3. Puesta a prueba del método con la ecuación de transporte

Tras haberse expuesto ya los elementos necesarios para realizar todo el método de optimización, se va a poner a prueba con la ecuación de transporte (2.1) de la sección anterior. Los detalles numéricos implicados en su resolución serán explicados más adelante.

La ecuación de transporte recibe este nombre porque cualquier perturbación viaja con velocidad constante  $\frac{dx}{dt} = u$  sin deformarse.

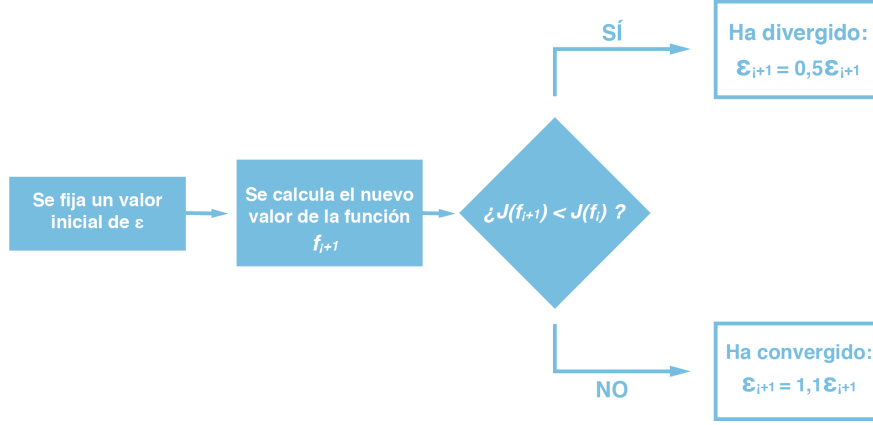


Figura 6: Esquema del criterio utilizado para la modificación de la longitud de paso  $\varepsilon$

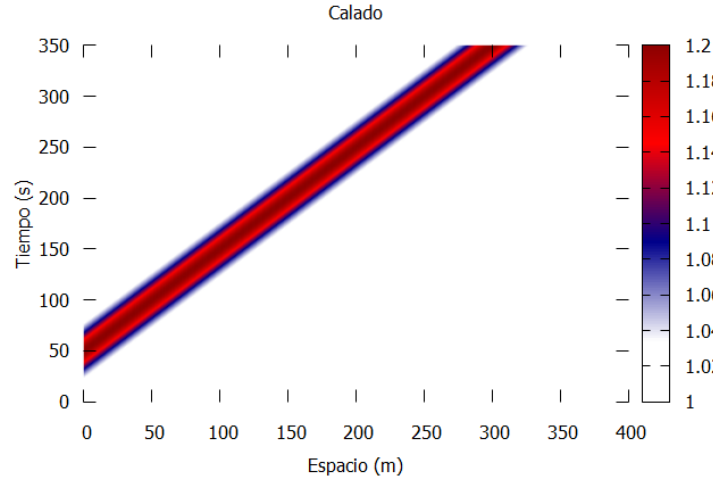


Figura 7: Transporte de una onda introducida en el sistema inicialmente en reposo a través de la condición de contorno aguas arriba.  $L = 500 \text{ m.}$ ,  $u = 1 \text{ ms}^{-1}$  y condición de contorno gaussiana  $h(0, t) = h_0 + \frac{1}{4} \exp\left(\frac{t - 50}{20}\right)^2$

La condición de contorno aguas arriba representada en la figura 7 será el objetivo a representar, para lo cuál se define la siguiente función  $r$ :

$$r = \frac{1}{2} [c(x_T, t) - c_{\text{obj}}(x_T)]^2 \delta(x_T) \quad (3.8)$$

De modo que la función objetivo es:

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^T [c(x_T, t) - c_{\text{obj}}(x_T)]^2 dt \quad (3.9)$$

De acuerdo con el esquema de la figura 5, una vez guardada la solución objetivo en un punto  $x_T$ , se fija la condición de contorno a optimizar a un valor arbitrario. En concreto se establece  $(0, t) = 0$  de modo que la primera iteración es un caso estacionario. Pero el problema adjunto no lo será, dado que  $\frac{\partial r}{\partial c} = c(x_T, t) - c_{\text{obj}}(x_T) \neq 0$ , por lo que habrá una fuente no nula en  $x = x_T$ .

Si se deja evolucionar al algoritmo termina convergiendo y se observa cómo se ha ido reduciendo la función objetivo hasta alcanzar el mínimo posible  $J = 0$  pues es una función definida estrictamente positiva. En la imagen 8 se puede comparar el proceso con el algoritmo mostrado en la figura 6 y para un paso  $\epsilon$  fijo. Como este caso es sencillo y converge rápido, empezar con un paso elevado pero fijo es más rápido que con uno bajo que va variando en el tiempo.

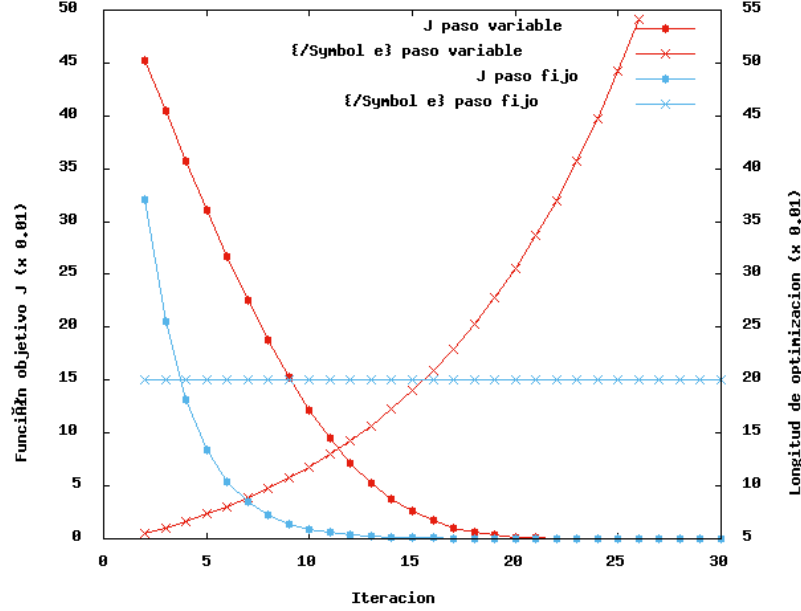


Figura 8: Convergencia del problema hacia la minimización de  $J$ .

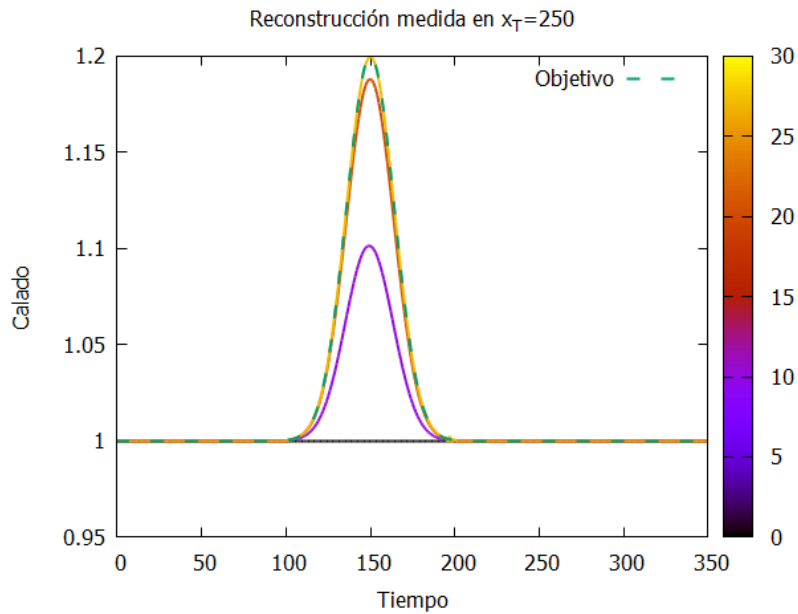


Figura 9: Convergencia de la solución en  $x = x_T$  hacia el objetivo. Conforme avanza el número de iteraciones la función medida (curvas continuas) se va acercando cada vez más a la curva objetivo (punteada) medida al principio.

## 4. Formulación de ecuaciones de aguas poco Profundas

### 4.1. Derivación a partir de las leyes de conservación

Las hipótesis fundamentales para obtener las ecuaciones en 1D (conocidas como hipótesis de St. Venant) son:

- El flujo es unidimensional. La altura o calado  $h$  y la velocidad  $u$  solo dependen de la dirección de propagación  $x$  y del tiempo  $t$ . La velocidad se supone uniforme en cada sección transversal y el nivel de agua es una superficie horizontal a través de la misma.
- El flujo es incompresible, homogéneo y las fuerzas de fricción en las paredes siguen una ley de estado estacionaria incluso en situaciones de flujo transitorio.
- La curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales despreciables. La distribución de presión, por tanto, es simplemente la correspondiente a la hidrostática.
- La pendiente media del fondo  $\theta$  en la dirección principal es pequeña en el sentido de que se mantienen válidas las aproximaciones:  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

Aplicar las leyes de conservación a un canal rectangular dan las ecuaciones de aguas poco profundas:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) - gh(S_o - S_f) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $h$  es el calado o altura del agua,  $q = uh$  el caudal que atraviesa la sección por unidad de anchura,  $S_o$  la pendiente del suelo y  $S_f$  representa el rozamiento según la Ley de Manning[9].

Que puede expresarse en forma matricial como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} - \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{U}$  representa las variables,  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  los flujos promedios en la vertical y  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  los términos fuente y sumidero:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_o - S_f) \end{pmatrix}$$

Es útil introducir el Jacobiano  $\mathbf{J}$  del vector de flujos se define como  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Su utilidad radica en que permite expresar la ecuación (4.2) en una forma alternativa que no es conservativa, pero resulta muy útil para su aplicación a métodos numéricos

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{S}(\mathbf{U}) = 0 \quad (4.4)$$

## 4.2. Formulación característica de las ecuaciones Shallow Water Linealizadas

Las ecuaciones (4.1) pueden linealizarse para variaciones espaciales de  $h$  pequeñas. Este desarrollo se realiza en el anexo B, de donde se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

donde  $h_0$  es el calado en el instante inicial. La forma de cada una de ellas recuerda a la ecuación de transporte (2.1) pero se encuentran acopladas entre sí.

Este acople se puede observar expresando las ecuaciones en forma matricial y observando el Jacobiano:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & h_0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Resolviendo la ecuación característica del Jacobiano se obtienen sus autovalores

$$\begin{vmatrix} -\lambda & h_0 \\ g & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - gh_0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{gh_0} \equiv \pm c \quad (4.8)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas.

Se trata de dos autovalores reales, indicando que es hiperbólico, por lo que es diagonalizable. Los autovalores y sus autovectores correspondientes son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +c & \lambda_2 &= -c \\ \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ g/c \end{pmatrix} & \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -g/c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se puede definir ahora la matriz  $\mathbf{P}$  formada por los dos autovectores uno en cada columna, así como su inversa.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ g/c & -g/c \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & c/g \\ 1 & -c/g \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}$  es una matriz diagonal que surge de hacer el producto de  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$ . Así pues, multiplicando la ecuación (4.6) por  $\mathbf{P}^{-1}$  e introduciendo la identidad  $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}$  entre  $\mathbf{J}$  y  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$ , resulta:

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

Las nuevas variables desacopladas son:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h + c/g \\ h - c/g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

El nuevo sistema de ecuaciones puede expresarse en función de la derivada total



$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} - c \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 & \text{si } \frac{dx}{dt} = -c \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 & \text{si } \frac{dx}{dt} = +c \end{cases} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, existen dos curvas características a lo largo de las cuáles la información se conserva. En este caso son dos rectas de pendiente  $\pm c$ . A lo largo de la recta de pendiente  $+c$  se conserva la cantidad  $w_2 = h - cu/b$  mientras que en la de pendiente  $-c$  lo que se conserva es  $w_1 = h + cu/b$ . A esta información conservada (que naturalmente depende del problema considerado) se le denomina invariante de Riemann.

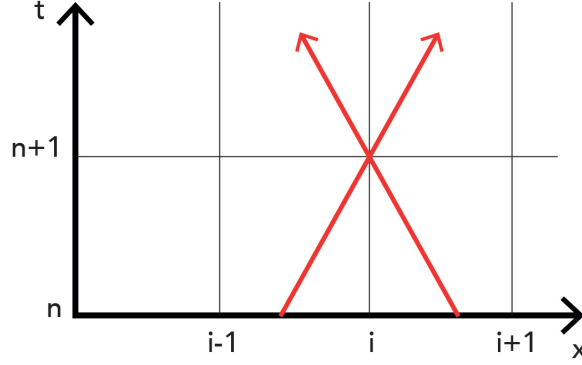


Figura 10: Líneas características. Los invariantes de Riemann  $w_1$  y  $w_2$  se conservan a lo largo de las rectas de pendiente  $-c$  y  $+c$  respectivamente

Esta propiedad da lugar al conocido como método de las características para la resolución de ecuaciones diferenciales. El sistema reduce una ecuación diferencial en derivadas parciales hiperbólica a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

#### 4.3. Formulación característica de las ecuaciones Shallow Water

Al igual que en el caso lineal el objetivo es encontrar los autovalores y autovectores del Jacobiano (4.3) para así obtener las líneas características y los invariantes de Riemann del sistema.

Resolviendo la ecuación característica se obtienen los autovalores y autovectores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - c & \lambda_2 &= u + c \\ \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nuevamente se construye la matriz  $\mathbf{P}$ , su inversa  $\mathbf{P}^{-1}$  y el que será el Jacobiano del nuevo sistema  $\mathbf{\Lambda}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u - c & u + c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} u + c & -1 \\ -u + c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u - c & 0 \\ 0 & u + c \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Siguiendo el mismo desarrollo de (4.10) y (4.11) pero con  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{J}$  de las ecuaciones no lineales se obtienen las nuevas variables del sistema característico:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} (u + c)h - q \\ -(u - c)h + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Ahora, el sistema de ecuaciones puede expresarse como:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial w_1}{\partial x} - gh(S_o - S_f) = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial w_2}{\partial x} - gh(S_o - S_f) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

En el caso sin pendiente y sin rozamiento  $S_o = S_f = 0$ , esto implica:

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dq}{dt} - (u + c) \frac{dh}{dt} = 0 \quad a \text{ lo largo de } \frac{dx}{dt} = u - c \quad (4.18)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{dq}{dt} - (u - c) \frac{dh}{dt} = 0 \quad a \text{ lo largo de } \frac{dx}{dt} = u + c \quad (4.19)$$

Usando que:

$$c^2 = gh \Rightarrow 2c\delta c = g\delta h \Rightarrow \delta h = \frac{2c}{g}\delta c; \quad q = uh \quad (4.20)$$

se puede manipular la expresión de  $\mathbf{W}$  de (4.16):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} (u + c)\delta h - \delta(uh) \\ -(u - c)\delta h + \delta(uh) \end{pmatrix} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} (u + c)\delta h - h\delta u - u\delta h \\ -(u - c)\delta h + h\delta u + u\delta h \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} c\delta h - h\delta u \\ c\delta h + h\delta u \end{pmatrix} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 2c^2/g\delta c - c^2/g\delta u \\ 2c^2/g\delta c + c^2/g\delta u \end{pmatrix} = \frac{1}{2g} \begin{pmatrix} 2c\delta c - c\delta u \\ 2c\delta c + c\delta u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Y, finalmente:

$$\delta \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{c}{2g} \begin{pmatrix} \delta(2c - u) \\ \delta(2c + u) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Por tanto, las expresiones (4.18) y (4.19) con los nuevos valores de la variación de  $\mathbf{W}$  de (4.22)

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{d}{dt}(u - 2c) = 0 \quad a \text{ lo largo de } \frac{dx}{dt} = u - c \quad (4.23)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{d}{dt}(u + 2c) = 0 \quad a \text{ lo largo de } \frac{dx}{dt} = u + c \quad (4.24)$$

Al contrario que en el caso lineal, ahora no se desacoplan las ecuaciones y es necesario resolver las dos variables a la vez. Además, las curvas características no son rectas de pendiente constante, sino que esta depende del punto del plano  $(x, t)$ . También se han encontrado los invariantes de Riemann  $R_1 = u - 2c$  de (4.23) y  $R_2 = u + 2c$  de (4.24).

#### 4.4. Tipos de flujo y condiciones de contorno

El hecho de que en las ecuaciones no lineales las direcciones de propagación de los invariantes de Riemann no sea constante da lugar a tres tipos de flujo:

- Cuando  $u < c$  las dos curvas características tienen pendientes con distinto signo, por lo que el flujo discurre en régimen subcrítico de izquierda a derecha.
- Cuando  $u > c$  las dos curvas características tienen pendiente positiva y el flujo va de izquierda a derecha pero en régimen subcrítico: la información no puede viajar aguas arriba. En otras palabras: la velocidad de propagación de una onda respecto al flujo es menor que la del propio fluido, por lo que se ve arrastrado por este.
- Cuando  $-u > c$  sucede un caso parecido al anterior. Las dos curvas características tienen pendiente negativa, por lo que el flujo es supercrítico y fluye de derecha a izquierda.

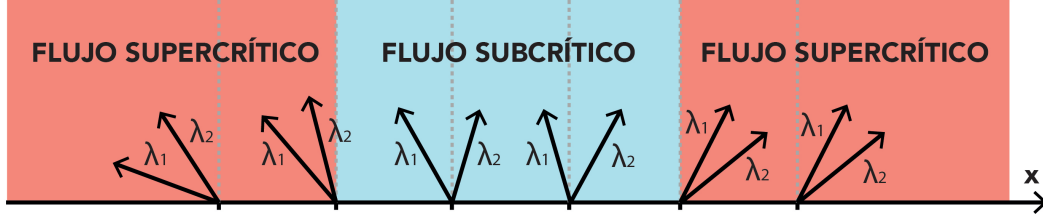


Figura 11: El tipo de flujo cambia según la pendiente de las curvas características.

La dirección de los flujos a través de una pared marca la cantidad de información que queda libre de introducir. Cuando las dos direcciones salen o entran en el dominio problema (flujo subcrítico) habrá libertad para fijar las dos condiciones de contorno en esa celda o ninguna respectivamente. Sin embargo en flujo subcrítico una de las variables ya viene determinada por el flujo entrante, quedando libertad para determinar una única condición de contorno.

#### 4.5. Ecuaciones adjuntas del sistema linealizado

Ahora, para obtener las ecuaciones adjuntas del sistema linealizado (B.6) se hace un procedimiento al realizado en (2.3): la ecuación de continuidad se multiplica por la variable adjunta  $\sigma(x, t)$  y la ecuación de momento por otra  $\psi(x, t)$ . La suma de estos dos productos se integra en tiempo y espacio.

$$K = \int_0^T \int_0^L \left[ \sigma \left( \frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \psi \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] dx dt \quad (4.25)$$

Ahora, al igual que se hizo con la ecuación de transporte, se integra por partes a conveniencia para pasar las derivadas parciales a las variables adjuntas. En el desarrollo sucesivo se usa la notación  $\phi_i$  para denotar la derivada parcial de  $\phi$  respecto a  $i$

$$K = \int_0^L [h\sigma]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L h\sigma_t dx dt + \int_0^T [h_0 u \sigma]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L h_0 u \sigma_x dx dt \\ + \int_0^L [u\psi]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L u\psi_t dx dt + \int_0^T [gh\psi]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L gh\psi_x dx dt = 0 \quad (4.26)$$

Tomando ahora primeras diferencias respecto a las variables  $h$  y  $q$ , la función objetivo (??) se convierte en:

$$\delta J = \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial r}{\partial h} \delta h + \frac{\partial r}{\partial u} \delta u \right) dx dt \quad (4.27)$$

$$\delta J + \delta K = \int_0^L [\sigma \delta h + \psi \delta u]_0^T dx + \int_0^T [h_0 \sigma \delta u + g \psi \delta h]_0^L dt \\ - \int_0^T \int_0^L \left[ \left( \sigma_t + g \psi_x - \frac{\partial r}{\partial h} \right) \delta h + \left( \psi_t + h_0 \delta_x - \frac{\partial r}{\partial u} \right) \delta u \right] dx dt \quad (4.28)$$

Si se cumplen las siguientes expresiones adjuntas

$$\begin{cases} \sigma_t + g \psi_x - \frac{\partial r}{\partial h} = 0 \\ \psi_t + h_0 \delta_x - \frac{\partial r}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

solamente quedan los 8 términos de las integrales de contorno:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^L & \left[ \sigma(x, T) \delta h(x, T) + \psi(x, T) \delta u(x, T) - \sigma(x, 0) \delta h(x, 0) \right. \\ & \left. - \psi(x, 0) \delta u(x, 0) \right] dx + \int_0^T \left[ h_0 \sigma(L, t) \delta u(L, t) + g \psi(L, t) \delta h(L, t) \right. \\ & \left. - h_0 \sigma(0, t) \delta u(0, t) - g \psi(0, t) \delta h(0, t) \right] dt \end{aligned} \quad (4.30)$$

Fijando condiciones iniciales para los problemas directos y adjuntos

$$\delta h(x, 0) = \delta q(x, 0) = \sigma(x, T) = \psi(x, T) = 0, \quad (4.31)$$

se elimina la integral espacial de (4.30) y la variación de la función objetivo  $\delta J$  se convierte en:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^T & \left[ h_0 \sigma(L, t) \delta u(L, t) + g \psi(L, t) \delta h(L, t) \right. \\ & \left. - h_0 \sigma(0, t) \delta u(0, t) - g \psi(0, t) \delta h(0, t) \right] dt \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aquí se pueden escoger las condiciones de contorno de las ecuaciones adjuntas. Si se quiere controlar el calado se impondrá  $\sigma(0, t) = \sigma(L, t) = 0$  y elimina los términos dependientes de  $\delta u$ . Mientras que si lo que se quiere controlar es la velocidad del flujo  $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ . Nótese que ambas condiciones son compatibles con flujo subcrítico dado que se fija una condición en cada frontera.

$$\delta J_1 = \int_0^T g \psi(L, t) \delta h(L, t) - g \psi(0, t) \delta h(0, t) dt \quad (4.33)$$

$$\delta J_2 = \int_0^T h_0 \sigma(L, t) \delta u(L, t) - h_0 \sigma(0, t) \delta u(0, t) dt \quad (4.34)$$

Por ejemplo, si se quiere obtener la sensibilidad respecto a la condición de contorno del calado aguas arriba  $\delta h(0, t)$ , se escogerá el primer juego de condiciones de contorno adjuntas que dan lugar a  $\delta J_1$  en (4.33). Una perturbación en el tiempo  $t_i$  hará que  $\delta h(0, t_i)$  no sea nula, pero la correspondiente variación evaluada aguas abajo en el mismo tiempo  $t_i$  sí será cero  $\delta h(L, t_i) = 0$  debido a que la velocidad de la onda es finita *Tesis página 43. No lo entiendo bien, porque aunque en ese mismo instante la perturbación no llegue, sí lo hará tras pasar un cierto tiempo  $\tau$  y entonces se notará aguas abajo con un retraso en  $\delta h(L, t_i + \tau)$* , por lo que la variación de la función objetivo se reduce a:

$$\delta J_1 = - \int_0^T g \psi(0, t) \delta h(0, t) dt \quad (4.35)$$

de donde se deduce que las sensibilidades son

$$S_i = \left( \frac{\delta J_1}{\delta h(0, t_i)} \right) = -g \psi(0, t) \quad (4.36)$$

#### 4.6. Sensibilidades de las ecuaciones Shallow Water

El procedimiento para obtener las ecuaciones adjuntas del caso no lineal es operacionalmente muy similar al caso linealizado. Es por ello que su desarrollo se realiza en el anexo C. Se rescatan a continuación los dos resultados más importantes: las ecuaciones adjuntas obtenidas en (C.5) y la expresión de  $\delta J$  en (C.4) una vez se han anulado éstas:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left( \frac{q^2}{h^2} + gh \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial h} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{2q}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\delta J = \int_0^L [\delta h \sigma + \delta q \psi]_0^T dx + \int_0^T \left[ \delta q \sigma + \left( \frac{2q}{h} \delta q - \frac{q^2}{h^2} \delta h \psi + gh \delta h \right) \psi \right]_0^L dt \quad (4.38)$$

Escogiendo las condiciones iniciales para los problemas directo y adjunto

$$\delta h(x, 0) = \delta q(x, 0) = \sigma(x, T) = \psi(x, T) = 0 \quad (4.39)$$

la integral de contorno espacial desaparece, quedando solamente la temporal de modo que  $\delta J$  se expresa como:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^T & \left\{ \left[ \sigma(0, t) + 2 \frac{q(0, t) \psi(0, t)}{h(0, t)} \right] \delta q(0, t) \right. \\ & - \left[ \sigma(L, t) + 2 \frac{q(L, t) \psi(L, t)}{h(L, t)} \right] \delta q(L, t) \\ & + \left[ gh(0, t) \psi(0, t) - \frac{q(0, t)^2 \psi(0, t)}{h(0, t)^2} \right] \delta h(0, t) \\ & \left. - \left[ gh(L, t) \psi(L, t) - \frac{q(L, t)^2 \psi(L, t)}{h(L, t)^2} \right] \delta h(L, t) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esta expresión se puede simplificar aún más imponiendo condiciones de contorno para las variables adjuntas. Una condición puede establecerse para cada contorno siendo consistentes con flujo subcrítico. Por ejemplo, eligiendo

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad (4.41)$$

se reduce el funcional a:

$$\delta J = \int_0^T [\sigma(0, t) \delta q(0, t) - \sigma(L, t) \delta q(L, t)] dt \quad (4.42)$$

La sensibilidad del caudal aguas arriba (que normalmente es lo que se controla en los casos reales) se expresa como:

$$S_i = \left( \frac{\delta J}{\delta q(0, t_i)} \right) = \sigma(0, t_i) \quad (4.43)$$

Existe una forma alternativa de obtener las sensibilidades[13] que se basa en la formulación característica para estimar unos invariantes de Riemann aproximados y usarlos para obtener las sensibilidades. Esto es necesario hacerlo en casos muy concretos cuando hay rebotes en condiciones de frontera que actúen como paredes reflectantes, pero no sucederá en el ámbito trabajo.

## 5. Resolución numérica de las ecuaciones

### 5.1. Esquema numérico: Método de Godunov

Este esquema numérico se deduce de una formulación integral. Es por tanto, un método de volúmenes finitos. Es análogo a un método upwind de primer orden de diferencias finitas pero pensarlo en términos de flujos integrales resulta muy útil. Como se verá a continuación, el método de Godunov requiere evaluar ciertas cantidades sobre las interfaces de las celdas contiguas. Se denomina pared  $i + 1/2$  a la que separa las celdas  $i$  e  $i + 1$ , y análogamente  $i - 1/2$  a la que hay entre  $i - 1/2$  e  $i$ . No obstante, las cantidades descritas en las secciones anteriores se refieren a los valores medios dentro de la celda, por lo que es preciso definir una nueva formulación que promedie estas cantidades a los dos lados de una pared, definiendo un nuevo Jacobiano  $\tilde{\mathbf{J}}$  que debe ser consistente con el Jacobiano original  $\mathbf{J}$  en el sentido de que:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) \rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{U}_i) \text{ cuando } \mathbf{U}_{i+1} \rightarrow \mathbf{U}_i \quad (5.1)$$

Y además, conservar los flujos:

$$\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1}) \quad (5.2)$$

De esta condición (5.2) se obtienen las siguientes relaciones promedio:

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad \tilde{c}_{i+1/2} = \sqrt{\frac{g}{2}(h_i + h_{i+1})} \quad (5.3)$$

En una frontera entre dos celdas, la cantidad de las variables  $\mathbf{U}$  es, en general, distinta a ambos lados:  $\mathbf{U}_L \neq \mathbf{U}_R$  y su diferencia  $\delta\mathbf{U}$  puede expresarse como una combinación lineal de los vectores propios  $\mathbf{e}_i$ . En un caso con dos variables:

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \mathbf{P}\delta\mathbf{W} = \delta w_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \delta w_2\tilde{\mathbf{e}}_2 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\mathbf{e}}_2 \quad (5.4)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la matriz de autovectores y  $\mathbf{W}$  las variables de la formulación característica. Si se toma el primer y último lado de la expresión anterior y se imagina una cantidad  $\mathbf{U}^*$  intermedia a  $\mathbf{U}_L$  evaluada a la izquierda de la pared y  $\mathbf{U}_R$  a la derecha:

$$\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* - \mathbf{U}_L = \tilde{\alpha}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\mathbf{e}}_2 \quad (5.5)$$

Ahora, asociando a cada componente de la combinación lineal  $\mathbf{U}_R - \mathbf{U}^*$  y  $\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_L$  respectivamente se obtienen dos definiciones alternativas de  $\mathbf{U}^*$  y se toma su valor como la media de estos dos resultados

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{U}_R - \mathbf{U}^* = \tilde{\alpha}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{U}^* - \mathbf{U}_L = \tilde{\alpha}_2\tilde{\mathbf{e}}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{U}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L) - \sum (\tilde{\alpha}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\alpha}_2\tilde{\mathbf{e}}_2) \quad (5.6)$$

Multiplicando  $\mathbf{U}^*$  por el Jacobiano  $\mathbf{J}$  se obtiene el flujo numérico  $F^*$  evaluando los términos del sumatorio sobre la pared.

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) - \frac{1}{2} \sum (|\tilde{\lambda}| \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}})_{i+1/2} \\ \mathbf{F}_{i-1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum (|\tilde{\lambda}| \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}})_{i-1/2} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

De este modo, la evolución temporal del vector de variables de las ecuaciones SW que tienen dos autovalores viene dada por:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*] = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum (\tilde{\lambda}^+ \tilde{\alpha} \tilde{e})_{i-1/2} + \sum (\tilde{\lambda}^- \tilde{\alpha} \tilde{e})_{i+1/2} \right] \quad (5.8)$$

donde  $\tilde{\lambda}^\pm = \frac{\tilde{\lambda} \pm |\tilde{\lambda}|}{2}$ . Los autovalores indican la direcci3n de propagaci3n de la informaci3n como refleja ve en la figura 11, de modo que a la celda  $i$  le afectan los flujos asociados a un autovalor positivo evaluados en la pared  $i - 1/2$  y los negativos cuando est3n en la  $i + 1/2$ .

Adem3s habr3 que tener en cuenta el paso de tiempo escogido, que no podr3 ser cualquiera. Su m3ximo valor viene determinado por el n3mero de Courant-Friedrichs-Levy ( $CFL$ ) que viene definido por:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{m3x}(|\lambda|) \Rightarrow \Delta t = \frac{CFL}{\text{m3x}(|\lambda|)} \Delta x \quad (5.9)$$

donde  $\text{m3x}(|\lambda|)$  representa m3ximo valor absoluto de los autovalores del problema que, en el caso no lineal no son constantes seg3n se vio en (4.14).

Este n3mero garantiza que sistema num3rico es estable para casos en los que las ecuaciones son homog3neas (no tienen fuente). La condici3n de estabilidad es  $CFL \leq 1$ . Cuanto m3s alto sea el n3mero  $CFL$  menos errores num3ricos se introducen en la soluci3n, pero cuando las ecuaciones s3 poseen fuentes (por ejemplo con una pendiente, o una fuente lateral) ser3 necesario escoger un  $CFL < 1$  para mantener la estabilidad a costa de perder exactitud en las medidas.

Por tanto, seg3n (5.9) en un escenario no lineal en el que los autovalores sean distintos no solo en el espacio, sino tambi3n en el tiempo quiere decir que en cada paso de tiempo  $n$  se encontrar3 un valor distinto de  $\text{m3x}(|\lambda^n|)$  por lo que  $\Delta t$  ir3 variando como puede verse en la figura ??

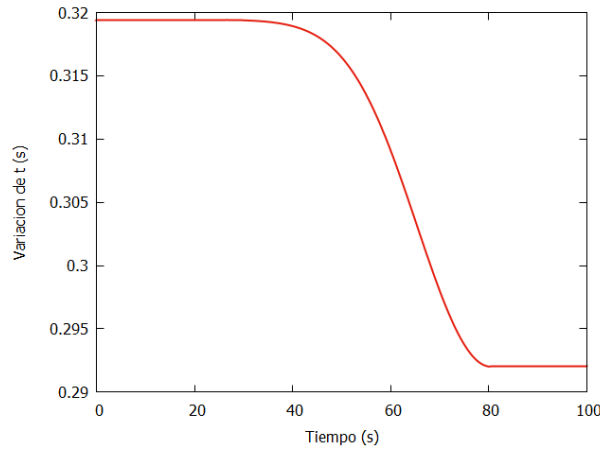


Figura 12: Evoluci3n de variaci3n de tiempo en cada iteraci3n con el tiempo. Puede verse que no es constante y evoluciona conforme avanza el problema.

## 5.2. Comparaci3n con caso anal3tico del sistema linealizado

Cuando en el caso linealizado se fijan las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases} h(0, t) = A \sin(\omega t) + h_0 \\ h(L, t) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Existe una soluci3n anal3tica[3] dada por:

$$\begin{cases} h_a(x, t) = \frac{A}{\cos(\omega L/c)} \cos \left[ (\omega L/c) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \right] \sin(\omega t) + h_0 \\ u_a(x, t) = -\frac{Ac}{h_0 \cos(\omega L/c)} \sin \left[ (\omega L/c) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \right] \cos(\omega t) \end{cases} \quad (5.11)$$

El error cometido puede estimarse mediante la siguiente relación:

$$\text{Error} = \sqrt{\frac{\sum_i \{[u_i^n - u_a(t_n)]^2 + [h_i^n - h_a(t_n)]^2\}}{\sum_i [(u_i^0)^2 + (h_i^0)^2]}} \quad (5.12)$$

El error cometido es muy pequeño no sobrepasa  $E = 5 \times 10^{-2}$  y está de acuerdo con el existente en la literatura[3]. Se puede consultar la representación de (5.12) en el anexo ???. Esto no quiere decir que cualquier otro problema vaya a resolverse correctamente (para ello haría falta comparar con medidas experimentales debido a que la mayoría de situaciones no se pueden resolver analíticamente), pero es un factor que hace confiar en el método.

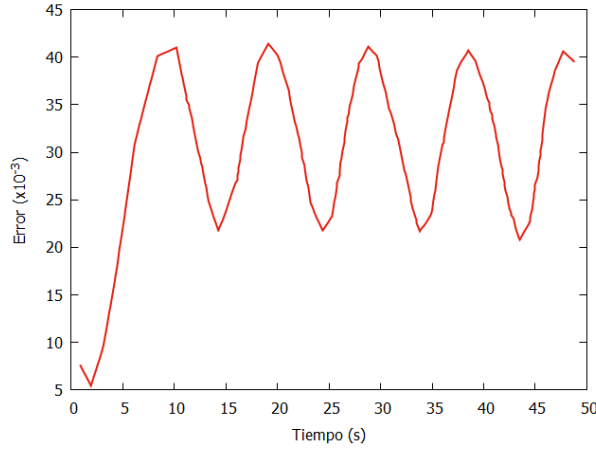


Figura 13: El error dado por la fórmula (5.12) se mantiene acotado en valores pequeños.

### 5.3. Resultados de la optimización de Shallow Waters

Se procede ahora a comprobar que el caso no lineal es capaz de reconstruir una condición inicial mediante todo lo expuesto a lo largo de este escrito. Para ello se le impondrán dos condiciones de contorno de acuerdo a lo permitido por el régimen subcrítico:

$$\begin{cases} q(0, t) = \frac{1}{4} \exp \left( \frac{80 - t}{20} \right)^2 \\ q(L, t) = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Es decir, aguas arriba se impone una condición de caudal gaussiana y aguas abajo el equivalente a una pared rígida, pues el caudal en ella es cero. No obstante, las simulaciones se harán en un canal de  $L = 1000 \text{ m}$ . y  $t = 350 \text{ s}$ ., de modo que la onda no alcance el final en el dominio temporal definido. La representación de la onda puede verse en la figura 14. Puede apreciarse el primer efecto no lineal: al contrario que en las dos ecuaciones lineales (2.1) y (B.6) en esta ocasión la forma de la onda no se conserva. En efecto la parte más alta de esta comienza centrada, como corresponde a la onda gaussiana, pero se va «adelantando» en la dirección de propagación hasta que finalmente se termina formando un frente de onda hacia el final de la simulación.

Habiendo tomado la referencia  $h_{\text{obj}}$  en  $x_T = 250 \text{ m}$ . se fija la condición inicial (5.13) a 0, la variable adjunta  $\sigma$  se representa en la figura 15. Aparece la fuente en  $x_T = 250 \text{ m}$ . solamente



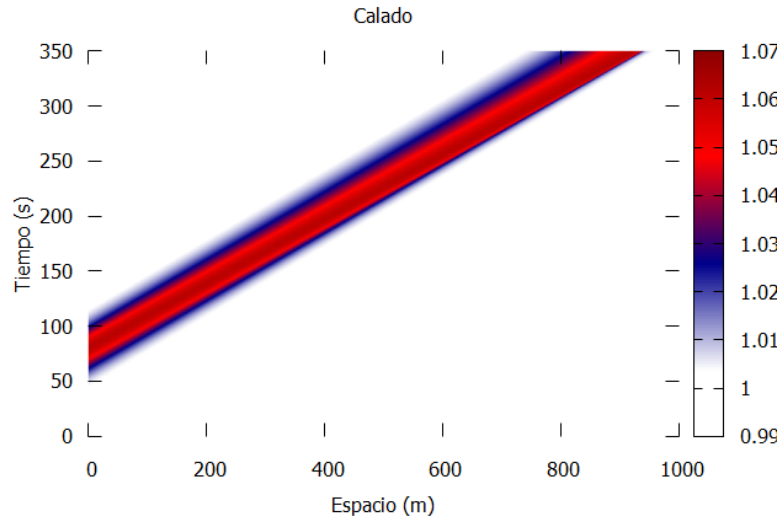


Figura 14: Propagación de la onda vista como el calado de esta.

durante el periodo de paso de la onda que hace que exista discrepancia entre  $h_{\text{obj}}$  y  $h$ . La onda adjunta  $\sigma$  rebota en la pared  $x = 0$  porque en (4.41) se fijó  $\psi(0, t) = 0$

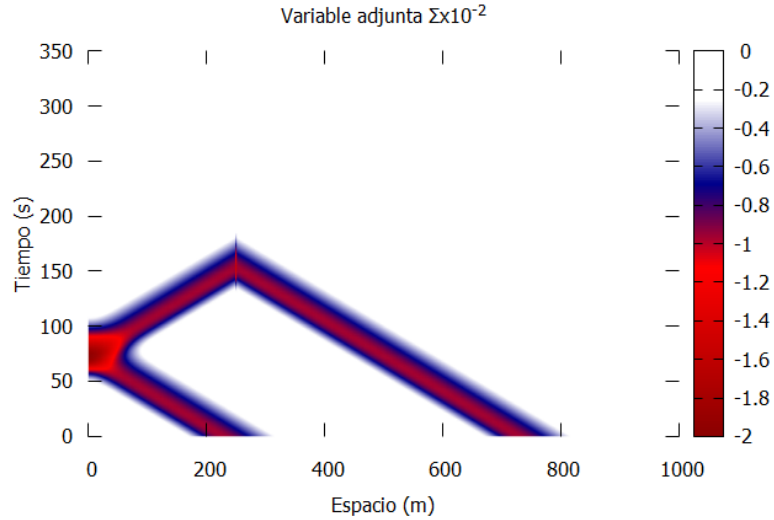


Figura 15: Evolución de la variable adjunta  $\sigma$ . La evolución de la ecuación adjunta es de  $T = 350$  s. hacia  $T = 0$  s.

Finalmente, se deja actuar al algoritmo de optimización y, se puede comprobar en la figura 16 que, efectivamente, consigue minimizar la función objetivo siendo prácticamente nula tras unas 40 iteraciones. Pasado este tiempo, debido a que se está usando el criterio de convergencia (3.6), las variaciones relativas son muy pequeñas y tarda unas cuantas iteraciones más en conseguir la convergencia definitiva.

Otra forma de ver la información es representar cuál es la condición de contorno y en el punto de medida  $x_T$  en la figura 17 conforme avanza el número de iteraciones. Se aprecia el mismo efecto de la figura 16 y la onda va teniendo cada vez más a la línea punteada, que era el objetivo medido al principio.

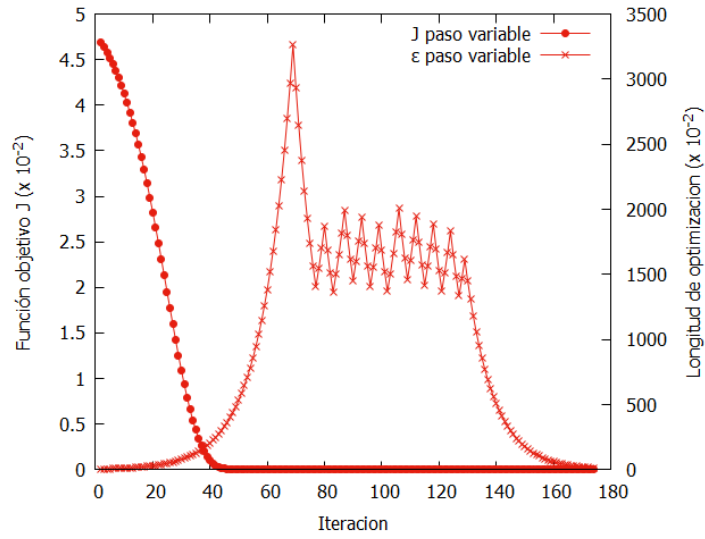


Figura 16: Convergencia vista como la minimización de la función objetivo  $J$ . También se muestra la variación de  $\epsilon$  conforme avanza el algoritmo.

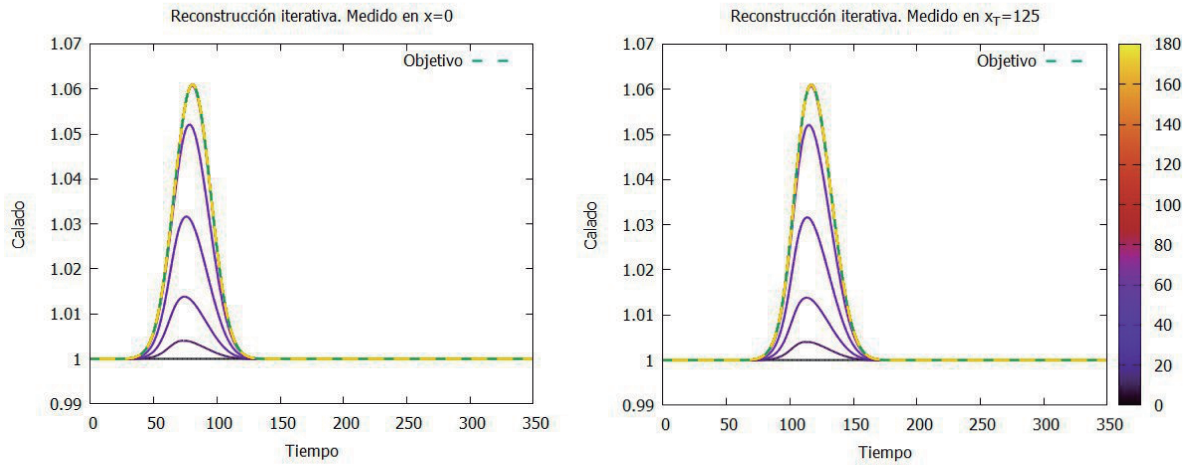


Figura 17: Convergencia de la condición de contorno  $q(0, t)$  y en el punto de medida  $x_T = 250 \text{ m}$ . conforme avanzan las iteraciones.

## 6. Conclusiones y trabajo futuro

### 6.1. Conclusiones

El objetivo fundamental perseguido en este trabajo era el de desarrollar un programa que fuese a la vez capaz de simular numéricamente las ecuaciones SW y sus ecuaciones adjuntas para aplicarlas a la optimización de una condición inicial.

El desarrollo teórico realizado en estas páginas ha sido de cuestiones elementales de la materia tratada dividida en tres grandes bloques: ecuaciones de aguas poco profundas, formulación adjunta y problemas de optimización. Sobre el segundo de ellos se queda mucho en el tintero. El mundo de las ecuaciones adjuntas es muy extenso. No obstante, el marco teórico aquí presentado es extrapolable a casos distintos sin muchas dificultades cambiando ligeramente los cálculos que hay que realizar pero con el mismo fundamento.

Desde el punto de vista numérico, el método de Godunov para la discretización de las ecuaciones de aguas poco profundas se ha mostrado robusto, sin que apareciesen errores numéricos apreciables en la escala de trabajo. A pesar de ser un método de primer orden, en las escalas utilizadas no se han apreciado errores significativos.

Del mismo modo, el método del gradiente conjugado, siendo uno de los menos sofisticados de la familia de algoritmos de optimización basados en el gradiente también ha arrojado unos buenos resultados logrando convergencias bastante rápidas. No obstante, no hay que perder de vista que el caso estudiado era relativamente sencillo, pues no había términos fuente ni pendiente ni rozamiento. Es de esperar que estos términos dificultasen la convergencia.

Estos dos hechos son los que han proporcionado los satisfactorios resultados en los intentos de reconstrucción realizados. Se consigue el control de la condición de contorno de forma muy rápida incluso en un ordenador convencional.

Debido a la limitación de la longitud máxima de la memoria, solamente se ha trabajado reconstruyendo condiciones de contorno a la entrada, dejando de lado casos tan interesantes como condiciones de contorno a la salida, las condiciones iniciales o algún término fuente. La herramienta desarrollada, además de cumplir con los propósitos planteados, ha sido planteada con la idea de que fuese fácilmente adaptable de modo que, una vez deducida teóricamente las expresiones de las sensibilidades y las condiciones de contorno adjuntas, puede rápidamente configurarse para adaptarse al nuevo problema.

Tampoco se han probado diferentes condiciones de contorno para observar el comportamiento. Las ecuaciones tratadas permiten plantear fenómenos tan distintos como roturas de presa, rotura de olas sobre playas, flujos en canales forma no cuadrada o incluso variable.

### 6.2. Trabajo futuro

Como se ha comentado, hay muchos casos interesantes que se pueden estudiar sin tener que modificar en exceso el programa ya existente. Este podría ser un primer paso que afrontar de seguir el estudio en esta materia. Por ejemplo, no se ha presentado en el trabajo, pero cuando el punto de medida se acerca demasiado al extremo de aguas abajo el método actual da resultados incorrectos. En la literatura existen correcciones a este problema, pero sería interesante poner a prueba la formulación actual para ver cuáles son los casos límite que puede resolver y cuando comienza a fallar.

Otra modificación lógica, aunque algo más complicado de implementar, sería el paso a un modelo 2D. Esto abriría la puerta a nuevas situaciones. Particularmente interesante sería aplicar el control a escenarios de desbordamiento que, con la formulación bidimensional, tendrían una llanura de inundación que es imposible de representar con flujo unidimensional.

La geometría del canal es otro factor que se podría modificar. Es más, siguiendo la lógica de la formulación adjunta, sería posible obtener las sensibilidades del flujo a variaciones en la forma del propio canal y hallar cuál es la geometría más apropiada para una infraestructura concreta.

## Bibliografía

- [1] Philippe Courtier and Olivier Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 42(5):531–549, 1990.
- [2] François-Xavier Le Dimet and Olivier Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 38(2):97–110, 1986.
- [3] Reinaldo García and Rene A. Kahawita. Numerical solution of the st. venant equations with the maccormack finite-difference scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6:259–274, 1986.
- [4] Michael B. Giles and Niles A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow Turbulence and Combustion*, 65:393–415, 2000.
- [5] Renaud Hostache, Xijun Lai, Jérôme Monnier, and Christian Puech. Assimilation of spatially distributed water levels into a shallow-water flood model. part ii: Use of a remote sensing image of mosel river. *Journal of Hydrology*, 390:257–268, 2010.
- [6] Villanueva Lacabrera I. *Estudio de regímenes transitorios y permanentes en ríos y canales*. PhD thesis, Universidad de Zaragoza, jul 1985.
- [7] Monnier J, Couderc F, Dartus D, Larnier K, Madec R, and Vila J-P. Inverse algorithms for 2d shallow water equations in presence of wet dry fronts: Application to flood plain dynamics. *Advances in Water Resources*, 97:11–24, aug 2016.
- [8] Asier Lacasta. *On the efficient implementation of numericla solvers for the simulatin and control of shallow flows on graphical processing units*. PhD thesis, Universidad de Zaragoza, nov 2016.
- [9] Asier Lacasta, Mario Morales-Hernández, Pilar Brufau, and Pilar García-Navarro. Application of an adjoint-based optimization procedure for the optimal control of internal boundary conditions in the shallow water equations. *Journal of Hydraulic Research*, apr 2017.
- [10] Singiresu S. Rao. *Engineering Optimization Theory and Practice*. John Wiley & Sons, Inc., fourth edition, 2009.
- [11] Brett F. Sanders. *Control of shallow-water flow using the adjoint sensitivity method*. PhD thesis, The University of Michigan, 1997.
- [12] Brett F. Sanders and Nikolaos D. Katopodes. Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *J. Irrig. Drain Eng.*, 125(5):287–297, 1999.
- [13] Brett F. Sanders and Nikolaos D. Katopodes. Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control. *Journal of Engineering Mechanics*, 126:909–919, sep 2000.
- [14] Lai X and Monnier J. Assimilation of spatially distributed water levels into a shallow-water flood model. part i: Mathematical method and test case. *Journal os Hydrology*, 377:1–11, jul 2009.